

# 3-DIMENSIONAL MATCHING



Universidad  
de La Laguna

**E. T. S. INGENIERÍA INFORMÁTICA**  
**Análisis de algoritmos**

Ubay Diaz Machín ([alu2238@etsii.ull.es](mailto:alu2238@etsii.ull.es))  
José Ismael Galindo Bonilla ([alu2621@etsii.ull.es](mailto:alu2621@etsii.ull.es))

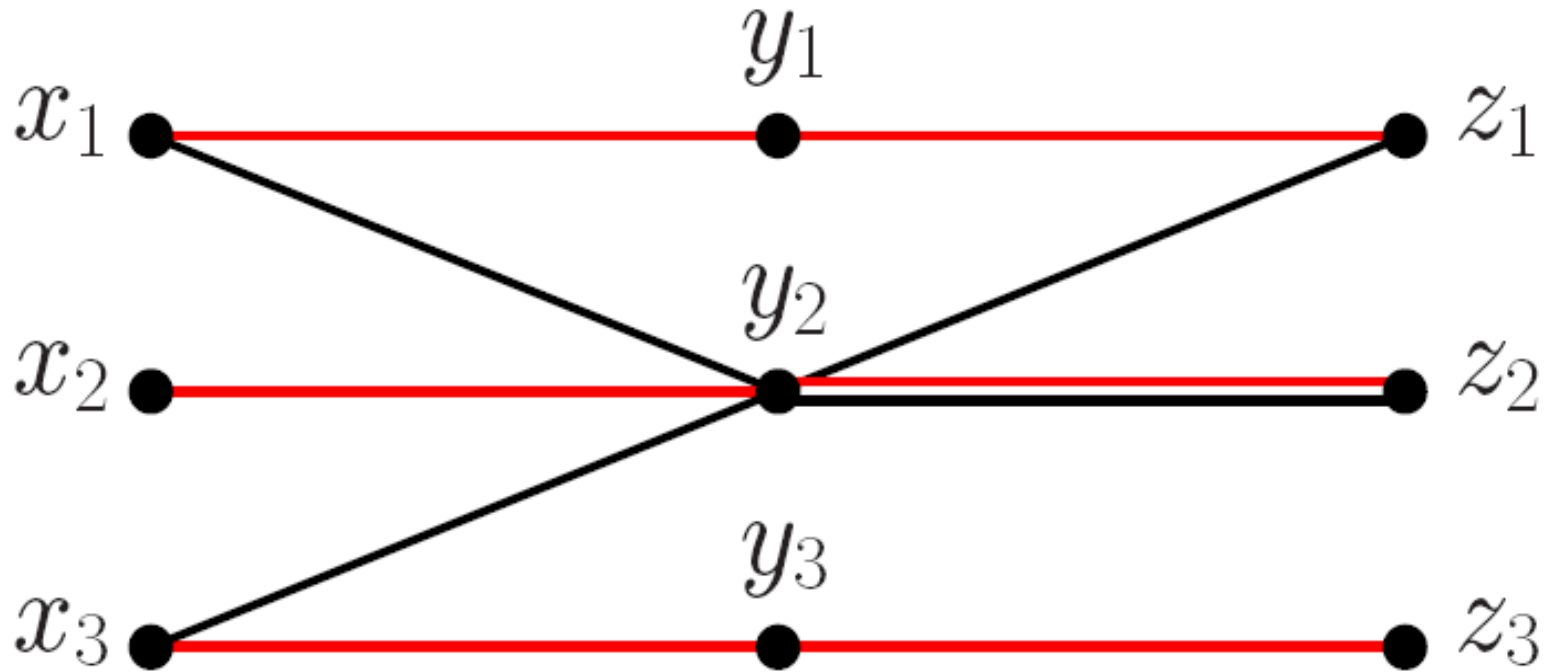
# ÍNDICE

- Descripción del problema 3DM
- 3DM es NP Completo
  - 3DM es NP
  - Transformación polinomial del 3SAT al 3DM
  - Demostración.

# DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

- Instancia:
  - Un conjunto  $M \subseteq W \times X \times Y$ 
    - $W \cap Y \cap X = \emptyset$  (disjuntos)
    - $|W| = |X| = |Y| = q$
- Pregunta:
  - Hay un matching en  $M$ .
  - Es decir, un subconjunto  $M' \subseteq M$  tal que:
    - $|M'| = q$
    - Todos los elementos  $W \cup X \cup Y$  están en alguna terceta de  $M'$  sin repetir ninguno.

# EJEMPLO



$$M = \left\{ (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_2), \right. \\ \left. (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_3, y_2, z_1) \right\}$$

# 3DM ES NP COMPLETO

- Pasos Principales:
  - Demostrar que 3DM es NP
  - Seleccionar un problema  $\pi'$  que sea NP Completo
  - Construir una transformación (f)  $\pi' \alpha$  3DM
  - Comprobar que la transformación f se hace en tiempo polinomial.

# 3DM ES NP

- Dada una instancia  $(M, X, Y, W)$  del 3DM se construye un algoritmo no determinista que genere una solución de  $|W|$  tercetas de  $M$  y compruebe en tiempo polinomial que no hay dos tercetas con elementos comunes.

# ALGORITMO $\Pi'$

- 3 SATISFABILITY (3SAT)

- Instancia:

- Conjunto de  $m$  cláusulas  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$

- $|c_i| = 3, 1 \leq i \leq m$

- Sobre un conjunto finito de  $n$  variables booleanas

- $U = \{u_1, \dots, u_n\}$

- Pregunta:

- Existe alguna asignación válida de  $U$  que satisfaga todas las cláusulas de  $C$ .

# 3SAT $\alpha$ 3DM

De una instancia  
del 3SAT  
(U,C)

Construir



Instancia del 3DM  
(W, X, Y, M)



$M' \subseteq M$

(U,C) es  
satisfacible



$M'$  es un matching



# 3SAT $\alpha$ 3DM

- **Técnica para la demostración de NP Completitud:**
  - Diseño de Componentes

- **Notación:**

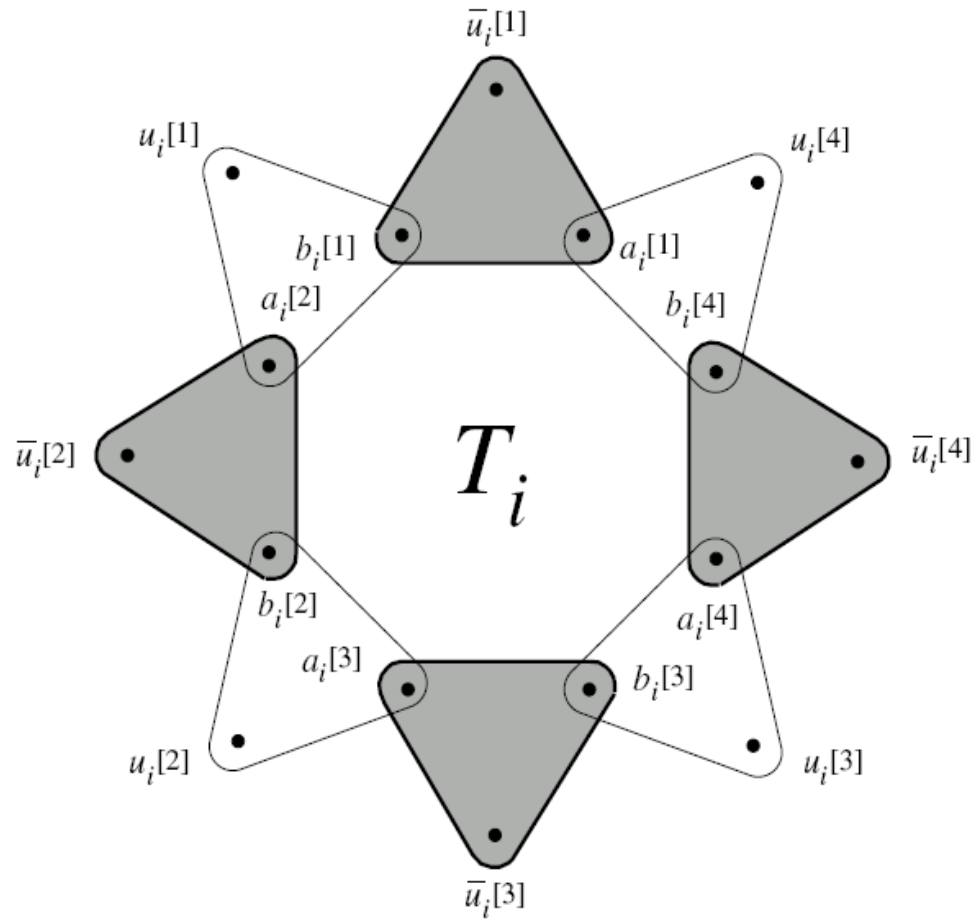
<b>3SAT</b>		<b>3DM</b>
<b>Variables:</b> $u_1, \dots, u_n$	—————→	<b>Variables:</b> $u_1(j), a_i(j), b_i(j), s_x(j), g_y(j)$
<b>Literales:</b> $u_1, \neg u_1$	—————→	<b>Variables:</b> $u_1(j), \neg u_1(j)$
<b>Cláusulas:</b> $c_j = (u_1, \neg u_2, u_3)$	—————→	<b>Tercetas:</b> $C_j = \{(u_1(j), s_x(j), s_y(j)),$ $(\neg u_2(j), s_x(j), s_y(j)),$ $(u_3(j), s_x(j), s_y(j))\}$

- **La demostración se basa en la construcción de tres tipos de componentes:**
  - “Truth setting and fan out” (Tercetas de asignación)
  - “Satisfaction testting” (Tercetas de satisfacción)
  - “Garbage collection” (Tercetas de relleno)

# 3SAT $\alpha$ 3DM

- **Componentes “Truth setting and fan out”**
  - Para cada variable  $u_i \in U$  se introduce una componente  $T_i$ .
    - $T_i$  depende del número de cláusulas  $m$  de  $C$
  - Estructura de  $T_i$ :
    - Elementos internos:
      - $a_i[j] \in X, 1 \leq j \leq m$  ;  $b_i[j] \in Y, 1 \leq j \leq m$ 
        - No van a pertenecer a otras tercetas de otro  $T_i$
    - Elementos externos:
      - $u_i[j], \neg u_i[j] \in W, 1 \leq j \leq m$ 
        - Pueden pertenecer a otras tercetas
  - El literal  $u_i$  en 3SAT puede ser usado en varias cláusulas, en el 3DM debemos tener muchas  $m$  copias de  $u_i$ .

# 3SAT $\alpha$ 3DM

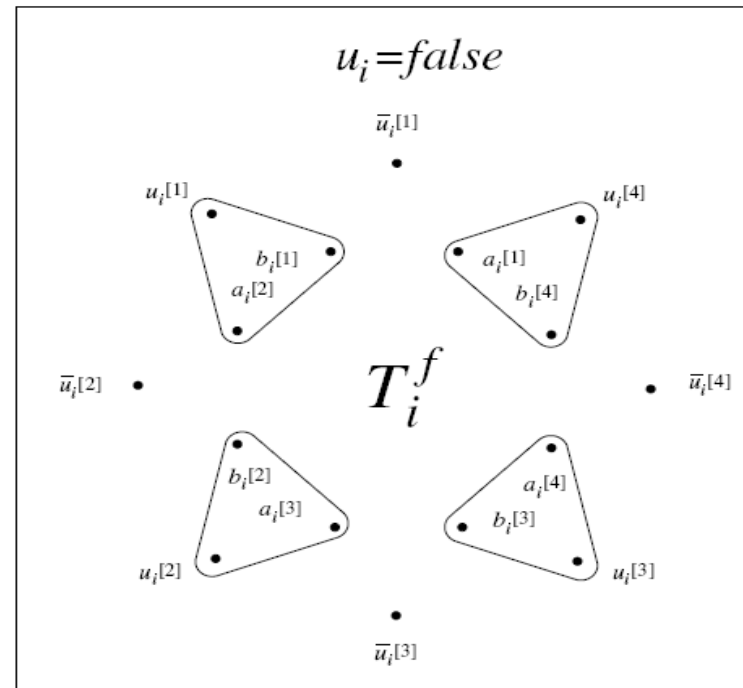
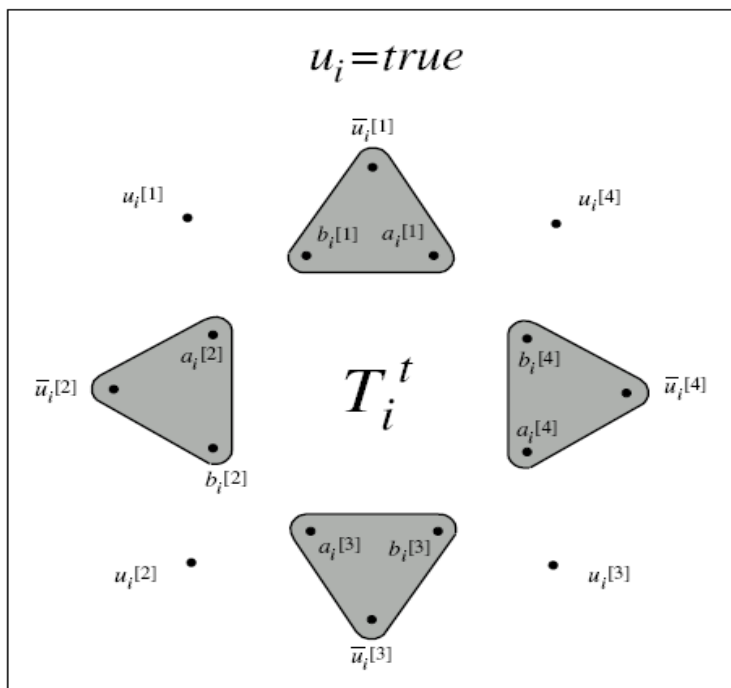


$$T_i^t = \{(\bar{u}_i[j], a_i[j], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\}$$

$$T_i^f = \{(u_i[j], a_i[j+1], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\} \cup \{(u_i[m], a_i[1], b_i[m]) : 1 \leq j \leq m\}$$

# 3SAT $\alpha$ 3DM

- Si ningún elemento interno de la componente  $T_i$  aparece en otra  $T_h$  ( $i \neq h$ )
  - $M'$  será un matching con  $m$  elementos de  $T_i$



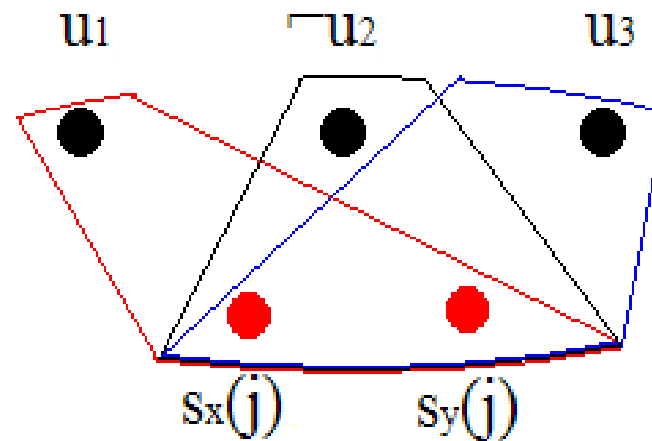
- Si  $u_i = true$  se elegirá como  $M'$  las tercetas grises, dejando libre el resto para poder utilizarlas en la construcción del resto de componentes.

# 3SAT $\alpha$ 3DM

- **Componentes “Satisfaction testing”**
  - Para cada cláusula  $c_j \in C$  introducimos una componente  $C_j$ .
  - Estructura:
    - Elementos Internos:  $s_x[j] \in X, s_y[j] \in Y : 1 \leq j \leq m$
    - Elementos externos:  $u_i[j], \neg u_i[j] \in W : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$
  - $C_j = \{(u_i[j], s_x[j], s_y[j]) : \text{si el literal } u_i \in c_j\}$   
 $\cup \{(\neg u_i[j], s_x[j], s_y[j]) : \text{si el literal } \neg u_i \in c_j\}$

# 3SAT $\alpha$ 3DM

$$c_j = (u_1, \neg u_2, u_3) \longrightarrow C_j = \{(u_1(j), s_x(j), s_y(j)), (\neg u_2(j), s_x(j), s_y(j)), (u_3(j), s_x(j), s_y(j))\}$$



# 3SAT $\alpha$ 3DM

- Cualquier matching  $M' \subseteq M$  debe contener una terceta de  $C_j$  para emparejar los elementos internos  $s_x[j]$  y  $s_y[j]$ :
  - $s_x[j]$  y  $s_y[j]$  pueden ser emparejados, sí sólo sí, al menos uno de los literales ( $u_i$ ) de  $c_j$  no ha sido emparejado en alguna componente "Truth setting"  $T_i (T_i \cap M')$
  - Si tenemos una 3SAT-Instancia satisfacible, entonces las variables  $s_x[j]$  y  $s_y[j]$  pueden ser emparejadas
  - Si tenemos una 3SAT-Instancia no satisfacible, entonces las variables  $s_x[j]$  y  $s_y[j]$  no pueden ser emparejadas.

# 3SAT $\alpha$ 3DM

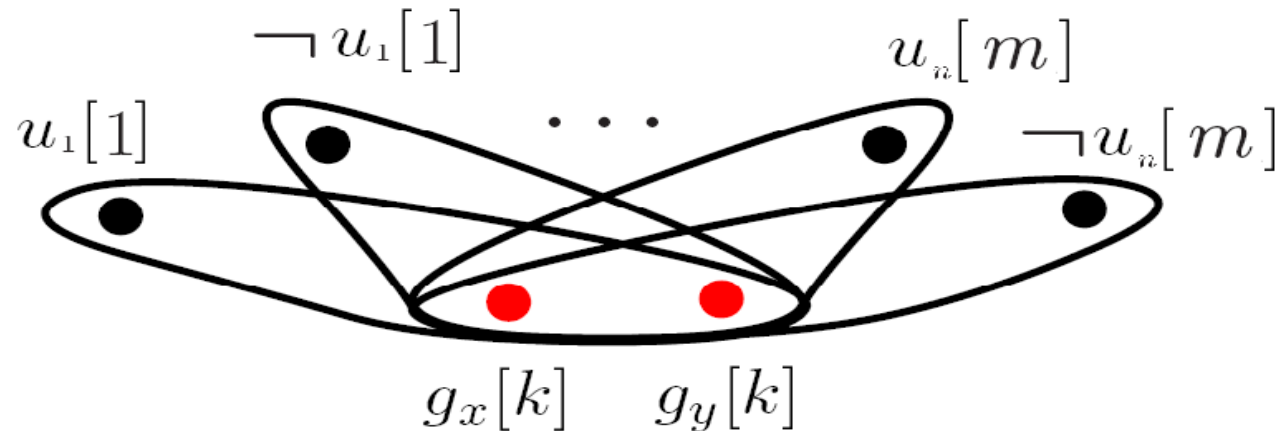
- **Componentes “Garbage collection”**

- Hay muchos  $u_i [j]$  que no se emparejan con componentes “truth setting” ni con componentes “satisfaction testing”
- Introducimos  $m(n-1)$  variables nuevas:
  - $g_x [k] \in X$  ,  $g_y [k] \in Y$ :  $1 \leq k \leq m(n-1)$
- ¿ Por qué  $m(n-1)$  variables?
  - Hay  $m \times n$  variables  $u$  sin emparejar después de calcular las tercetas de asignación.
  - Si todas las  $m$  cláusulas se satisfacen se han emparejado  $m$  variables.
  - Finalmente quedan sin emparejar  $(m \times n) - m = m(n-1)$



# 3SAT $\alpha$ 3DM

- Cada pareja  $(g_x [k], g_y [k])$  se enlazará con una única variable  $u_i [j]$  o  $\neg u_i [j]$  que no estén en las tercetas que se han formado con las componentes anteriores:



$$G = \{(u_i[j], g_x[k], g_y[k]), (\bar{u}_i[j], g_x[k], g_y[k])\}$$

$$: 1 \leq k \leq m(n - 1), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

# 3SAT $\alpha$ 3DM

- Resumiendo:

$$W = \{(u_i[j], \bar{u}_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \quad (2mn)$$

$$X = A \cup S_X \cup G_X \quad (2mn)$$

$$A = \{a_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$$S_X = \{s_x[j] : 1 \leq j \leq m\}$$

$$G_X = \{g_x[j] : 1 \leq j \leq m(n-1)\}$$

$$Y = B \cup S_Y \cup G_Y \quad (2mn)$$

$$B = \{b_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$$S_Y = \{s_y[j] : 1 \leq j \leq m\}$$

$$G_Y = \{g_y[j] : 1 \leq j \leq m(n-1)\}.$$

$$M = \left( \bigcup_{i=1}^n T_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m C_j \right) \cup G. \quad (2mn + 3m + 2m^2n(n-1))$$

# 3SAT $\alpha$ 3DM

Significato	Enumerazione
Numero di variabili in $\langle U, C \rangle$	$n$
Numero di clausole $\langle U, C \rangle$	$m$
Componente “Truth setting and fan out”: triple in $M$	$2mn$
Componente “Truth setting and fan out”: triple in $M'$	$mn$
Componente “Satisfaction testing”: triple in $M$	$3m$
Componente “Satisfaction testing”: triple in $M'$	$m$
Componente “Garbage collection”: triple in $M$	$2m^2n(n-1)$
Componente “Garbage collection”: triple in $M'$	$m(n-1)$
Dimensione del perfect matching: $ M'  = q =  W  =  X  =  Y $	$2mn$
Dimensione $M$	$2mn + 3m + 2m^2n(n-1)$

# 3SAT $\alpha$ 3DM

- Ejemplo de  $X, Y, W$  para  $n = 4$  y  $m=2$

$W$	$X$	$Y$
$u_1[1]$	$a_1[1]$	$b_1[1]$
$\bar{u}_1[1]$	$a_1[2]$	$b_1[2]$
$u_1[2]$	$a_2[1]$	$b_2[1]$
$\bar{u}_1[2]$	$a_2[2]$	$b_2[2]$
$u_2[1]$	$a_3[1]$	$b_3[1]$
$\bar{u}_2[1]$	$a_3[2]$	$b_3[2]$
$u_2[2]$	$a_4[1]$	$b_4[1]$
$\bar{u}_2[2]$	$a_4[2]$	$b_4[2]$
$u_3[1]$	$s_x[1]$	$s_y[1]$
$\bar{u}_3[1]$	$s_x[2]$	$s_y[2]$
$u_3[2]$	$g_x[1]$	$g_y[1]$
$\bar{u}_3[2]$	$g_x[2]$	$g_y[2]$
$u_4[1]$	$g_x[3]$	$g_y[3]$
$\bar{u}_4[1]$	$g_x[4]$	$g_y[4]$
$u_4[2]$	$g_x[5]$	$g_y[5]$
$\bar{u}_4[2]$	$g_x[6]$	$g_y[6]$

# 3SAT $\alpha$ 3DM

- Se ha observado que las tercetas resultantes  $M$  son el producto cartesiano de  $W \times X \times Y$
- Esta forma de definir las tercetas:
  - Desde su definición en términos de una instancia  $(U, C)$  del 3SAT
  - $M$  se construye en tiempo polinomial

# DEMOSTRACIÓN

- Para completar la demostración de NP Completitud falta por demostrar:

M contiene un  
matching  $M'$



$(U,C)$   
es satisfacible

# DEMOSTRACIÓN

**(U,C) es satisfacible  $\longrightarrow$   $M' \subseteq M$  es un matching**

- Sea  $t: U \rightarrow \{ T, F \}$  el dominio de valores para U que satisface las cláusulas C.
- Se construye un matching  $M' \subseteq M$  del modo siguiente:
  - Para cada cláusula  $c_j \in C$ :
    - $Z_j \in \{u_i, \neg u_i: 1 \leq i \leq n\} \cap c_j$ 
      - Literales con asignación verdadera.
      - Debe de existir al menos uno, ya que t satisface a  $c_j$ .

# DEMOSTRACIÓN

– Se construye la  $M'$ :

$$M' = \left( \bigcup_{t(u_i)=T} T_i^t \right) \cup \left( \bigcup_{t(u_i)=F} T_i^f \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m \{(z_j[j], s_x[j], s_y[j])\} \right) \cup G'$$

- $G'$ : conjunto de  $m(n-1)$  tercetas de  $G$  que incluyen:
  - Todos los  $g_x[k] \in X$ ,  $g_y[k] \in Y$
  - Y los  $u_i[j]$ ,  $\neg u_i[j] \in W$  que no se han emparejado.
- Es fácil de verificar que siempre se puede construir un  $G'$  para que el resultado del conjunto  $M'$  sea un matching.



# DEMOSTRACIÓN

$M' \subseteq M$  es un matching  $\longrightarrow$   $(U, C)$  es satisfacible

- Se ha visto que para cada  $u_i \in U$ ,  $M'$  incluía exactamente  $m$  tercetas de  $T_i$ :  $T_i^t$  o  $T_i^f$ .
- Sea  $t: U \rightarrow \{ T, F \}$  donde  $t(u_i) = T \leftrightarrow M' \cap T_i = T_i^t$ 
  - $t$  será una asignación correcta que satisface  $C$ .
- Consideremos una cláusula arbitraria  $c_j \in C$ 
  - Para cubrir los elementos internos de la componente  $C_j$  (de la componente de testting)
    - Se necesita al menos una terceta de  $C_j$  contenida en  $M'$ .
    - Esta terceta contiene un literal de  $c_j \in C$ , que no estará en  $M' \cap T_i$

# DEMOSTRACIÓN

- Como  $t(ui) = T \leftrightarrow M' \cap T_i = T_i^t$ 
  - Entonces  $t$  satisface la cláusula  $c_j$
- Si todas las cláusulas  $c_j \in C$  se satisfacen
  - $(U, C)$  es satisfacible

3-Dimensional Matching

es

NP COMPLETO